

Αξιώματα Πεάνο

- 1ο Αξ. $0 \in \mathbb{N}$ (μη κενό σύνολο).
2ο Αξ. Υπάρχει συνάρτηση $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (κλειστό ως προς «διάδοχος» S).
3ο Αξ. $\forall x, y \in \mathbb{N} \ S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$ (αμφιμονοσήμαντη).
4ο Αξ. $\forall x \in \mathbb{N} \ \neg S(x) = 0$ (κανείς έχει διάδοχο 0).
5ο Αξ. $\forall x \ (x \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in x \wedge (\forall y \in x \ s(y) \in x) \Rightarrow x = \mathbb{N})$ (ελάχιστο σύνολο που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα).

Οι πράξεις στους φυσικούς αριθμούς ορίζονται ως εξής:

- Πρόσθεση:
A1: $a + 0 = a$
A2: $a + S(b) = S(a + b)$
- Πολλαπλασιασμός:
B1: $a \cdot 0 = 0$
B2: $a \cdot S(b) = a + a \cdot b$
- Αφαίρεση:
Γ1: $a - 0 = a$
Γ2: $S(a) - S(b) = a - b$
- Διαίρεση:
Δ1: $\frac{0}{b} = 0$, με $b \neq 0$
Δ2: $\frac{a + b}{b} = S(\frac{a}{b})$

Ορίζουμε, ότι $S(0) = 1$

Θεώρημα 1:

$$\forall a \in \mathbb{N} \ S(a) = a + 1 \quad (1)$$

Απόδειξη θεωρήματος:

$$\begin{aligned} S(a) &= S(a + 0) \text{ από A1} \\ &= a + S(0) \text{ από A2} \\ &= a + 1 \text{ από ορισμό του 1} \end{aligned}$$

Απόδειξη κάθε ιδιότητας της πρόσθεσης:

- Προσεταιριστική:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

Απόδειξη:

Έστω, $a, b \in \mathbb{N}$ Αν $c = 0$, τότε

$$a + (b + 0) = a + b \text{ από A1}$$

$$(a + b) + 0 = a + b \text{ από A1}$$

Αν για $c \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

, τότε αρκεί ναδειχθεί ότι

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + (b + S(c)) = (a + b) + S(c)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a + (b + S(c)) &= a + S(a + c) \text{ από A2} \\ &= S(a + (b + c)) \text{ από A2} \\ &= S((a + b) + c) \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= (a + b) + S(c) \text{ από A2} \end{aligned}$$

- Ουδέτερο στοιχείο:

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad a + 0 = 0 + a = a$$

Απόδειξη:

Ισχύει ότι: $\forall a \in \mathbb{N} \quad a + 0 = a$ από A1

Αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad 0 + a = a$$

Αν $a = 0$, τότε

$$\begin{aligned} 0 + a &= 0 + 0 \\ &= 0 \text{ από A1} \\ &= a \end{aligned}$$

Αν για $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$0 + a = a$$

, τότε αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$0 + S(a) = S(a)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 + S(a) &= S(0 + a) \text{ από A2} \\ &= S(a) \text{ από επαγωγική υπόθεση} \end{aligned}$$

- Αντιμεταθετικότητα:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + b = b + a$$

Έστω, $a \in \mathbb{N}$.

Αν $b = 0$, τότε

$$\left. \begin{aligned} a + 0 &= a \\ 0 + a &= a \end{aligned} \right\} \text{λόγω, ότι το } 0 \text{ είναι ουδέτερο στοιχείο}$$

Αν $b = 1$ και:

Αν $a = 0$

$$\left. \begin{aligned} 1 + 0 &= 1 \\ 0 + 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{λόγω, ότι το } 0 \text{ είναι ουδέτερο στοιχείο}$$

Αν για $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$a + 1 = 1 + a$$

, τότε ναδειχθεί ότι:

$$S(a) + 1 = 1 + S(a)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S(a) + 1 &= S(a) + S(0) \text{ από τον ορισμό του } 1 \\ &= S(S(a) + 0) \text{ από A2} \\ &= S(S(a)) \text{ από A1} \\ &= S(1 + a) \text{ από θεώρημα 1} \\ &= 1 + S(a) \text{ από A2} \end{aligned}$$

Αν για $b \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\forall a \in \mathbb{N} \ a + b = b + a$$

, τότε ναδειχθεί ότι:

$$\forall a \in \mathbb{N} \ a + S(b) = S(b) + a$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a + S(b) &= a + (b + 1) \text{ από θεώρημα 1} \\ &= (a + b) + 1 \text{ από προσεταιριστικότητα} \\ &= (b + a) + 1 \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= b + (a + 1) \text{ από προσεταιριστικότητα} \\ &= b + (1 + a) \text{ από βασική περίπτωση για } b = 1 \\ &= (b + 1) + a \text{ από προσεταιριστικότητα} \\ &= S(b) + a \text{ από θεώρημα 1} \end{aligned}$$

Απόδειξη κάθε ιδιότητας του πολλαπλασιασμού:

- Στοιχείο απαλοιφής:

$$\forall a \in \mathbb{N} \ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Απόδειξη:

$$a \cdot 0 = 0 \text{ από B1}$$

Αν για $a = 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= 0 \cdot 0 \text{ από αντικατάσταση} \\ &= 0 \text{ από B1} \end{aligned}$$

Αν για $a \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$0 \cdot a = 0$$

, τότε

$$\begin{aligned} 0 \cdot S(a) &= 0 + (0 \cdot a) \text{ από B2} \\ &= 0 + 0 \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= 0 \text{ από A1} \end{aligned}$$

- Ουδέτερο στοιχείο:

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a \cdot S(0) \text{ από τον ορισμό του } 1 \\ &= a + (a \cdot 0) \text{ από B2} \\ &= a + 0 \text{ από B1} \\ &= a \text{ από A1} \end{aligned}$$

Και

Αν $a = 0$

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= 1 \cdot 0 \text{ από αντικατάσταση} \\ &= 0 \text{ από B1} \\ &= a \text{ από αντικατάσταση} \end{aligned}$$

Αν για $a \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 \cdot a = a$$

, τότε αρκεί δειχθεί ότι:

$$1 \cdot S(a) = S(a)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 \cdot S(a) &= 1 + (1 \cdot a) \text{ B2} \\ &= 1 + a \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= a + 1 \text{ Αντιμεταθετικότητα} \\ &= S(a) \text{ Θεώρημα 1} \end{aligned}$$

- Επιμεριστικότητα πολλαπλασιασμού από τα δεξιά (και από τα αριστερά, λόγω της αντιμεταθετικότητας) ως προς την πρόσθεση.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

Αν $x = 0$, τότε

$$\begin{aligned}(y + z) \cdot x &= (y + z) \cdot 0 \text{ από αντικατάσταση} \\ &= 0 \text{ στοιχείο απαλοιφής} \\ &= y \cdot 0 \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= y \cdot x \text{ από αντικατάσταση} \\ &= (y \cdot x) + 0 \text{ ουδέτερο στοιχείο} \\ &= (y \cdot x) + (z \cdot 0) \text{ στοιχείο απαλοιφής} \\ &= (y \cdot x) + (z \cdot x) \text{ από αντικατάσταση}\end{aligned}$$

Αν για $x \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\forall y, z \in \mathbb{N} \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

, τότε αρκεί να δειχθεί ότι:

$$\forall y, z \in \mathbb{N} \quad (y + z) \cdot S(x) = (y \cdot S(x)) + (z \cdot S(x))$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(y + z) \cdot S(x) &= y + z + ((y + z) \cdot x) \text{ από B2} \\ &= y + z + (y \cdot x) + (z \cdot x) \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= y + (y \cdot x) + z + (z \cdot x) \text{ από αντιμεταθετικότητα} \\ &= (y \cdot S(x)) + (z \cdot S(x)) \text{ από B2}\end{aligned}$$

- Αντιμεταθετικότητα:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Αν $y = 0$, τότε

$$\begin{aligned}x \cdot y &= y \cdot 0 \text{ από αντικατάσταση} \\ &= 0 \cdot y \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= x \cdot y \text{ από αντικατάσταση}\end{aligned}$$

Αν για $y \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

, τότε αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$\forall x \in \mathbb{N} \ x \cdot S(y) = S(y) \cdot x$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x \cdot S(y) &= x + (x \cdot y) \text{ από B2} \\ &= x + (y \cdot x) \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= (1 \cdot x) + (y \cdot x) \text{ από ουδέτερο στοιχείο} \\ &= (1 + y) \cdot x \text{ από επιμεριστικότητα από τα δεξιά} \\ &= S(y) \cdot x \text{ από το θεώρημα 1} \end{aligned}$$

- Προσεταιριστική

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Αν $x = 0$, τότε

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= 0 \cdot (y \cdot z) \text{ από αντικατάσταση} \\ &= 0 \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= 0 \cdot z \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= (0 \cdot y) \cdot z \text{ από στοιχείο απαλοιφής} \\ &= (x \cdot y) \cdot z \text{ από αντικατάσταση} \end{aligned}$$

Αν για $x \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\forall y, z \in \mathbb{N} \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

, τότε αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$\begin{aligned} \forall y, z \in \mathbb{N} \ S(x) \cdot (y \cdot z) &= (S(x) \cdot y) \cdot z \\ S(x) \cdot (y \cdot z) &= (x + 1) \cdot (y \cdot z) \text{ από το θεώρημα 1} \\ &= (x \cdot (y \cdot z)) + (1 \cdot (y \cdot z)) \text{ από επιμεριστικότητα} \\ &= (x \cdot (y \cdot z)) + (y \cdot z) \text{ από ουδέτερο στοιχείο} \\ &= ((x \cdot y) \cdot z) + (y \cdot z) \text{ από επαγωγική υπόθεση} \\ &= ((x \cdot y) + y) \cdot z \text{ από επιμεριστικότητα} \\ &= ((x \cdot y) + 1 \cdot y) \cdot z \text{ από ουδετερότητα στοιχείο} \\ &= ((x + 1) \cdot y) \cdot z \text{ από επιμεριστικότητα} \\ &= (S(x) \cdot y) \cdot z \text{ από θεώρημα 1} \end{aligned}$$

Ορισμός των φυσικών αριθμών με χρήση της θεωρίας συνόλων από τον John Von Neumann

- $0 := \{\}$
- $S(x) := x \cup \{x\}$
- $\mathbb{N} := \bigcap \{x \mid 0 \in x \wedge \forall y \in x \ S(y) \in x\}$

$$\begin{aligned}
 0 &= \{\} & &= \emptyset \\
 1 &:= \{ 0 \} & &= \{ \emptyset \} \\
 2 &:= \{ 0, 1 \} & &= \{ \emptyset, \{\emptyset\} \} \\
 3 &:= \{ 0, 1, 2 \} & &= \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \} \\
 4 &:= \{ 0, 1, 2, 3 \} & &= \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$